1 Glava 2

2 Elektrostatičko polje

2.1 Osnovne karakteristike i relacije elektrostatičkog polja

Elektrostatičko polje, kao što je rečeno, potiče od naelektrisanja koja se ne mijenjaju ni u vremenu i nepokretna su. Maksvelove jednačine ovog polja su:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \tag{2}$$

Skalarni električni potencijal V, koji karakteriše ovo polje, odnosno njegova distribucija, dobija se iz opšte jednačine:

$$\Delta V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \text{ , tj u ovom slučaju} \tag{3}$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4}$$

ovo je Poasonova diferencijalna jednačina. U tačkama gdje je $\rho = 0$ potencijal V zadovoljava homogenu Poasonovu diferencijalnu jednačinu koja je poznata pod imenom Laplasova diferencijalna jednačina:

$$\Delta V = 0 \tag{5}$$

Kao što znamo, rješenje gornje diferencijalne jednačine, dato u opštem obliku, glasi

$$V = \frac{q(t - \frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon r} \tag{6}$$

U slučaju tačkastog naelektrisanja u elektrostatici biće

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{7}$$

jer je $\frac{r}{c} = 0$, dok je $q(t) = q = const$.

U slučaju prostorne raspodjele naelektrisanja, gustine ρ, rješenje koje u opštem slučaju glasi:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\upsilon} \frac{\rho(t - \frac{r'}{c})}{r'} d\upsilon \tag{8}$$

u elektrostatičkom slučaju, prelazi u oblik:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\upsilon} \frac{\rho(r')}{r'} d\upsilon \tag{9}$$

Za elektrostatičko polje, dalje, važi

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}^{\,0} = -\operatorname{grad} V \tag{10}$$

što u Dekartovom koordinatnom sistemu daje

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{11}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{12}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{13}$$

U opštem slučaju, po ma kakvom pravcu, biće

$$E_l = -\frac{\partial V}{\partial l} \tag{14}$$

Pogledajmo sada Maksvelove jednačine za elektrostatičko polje, ali u integralnoj formi.
U tom cilju poslužićemo se diferencijalnim formama:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \,/\, d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \int_{S_L} \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{L_S} \vec{E} d\vec{l} = 0 \tag{15}$$

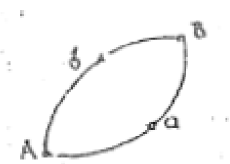
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \,/\, d\upsilon \quad \Rightarrow \quad \int_{\upsilon_S} \operatorname{div} \vec{D} d\upsilon = \int_{\upsilon_S} \rho d\upsilon \quad \Rightarrow \quad \oint_{S_\upsilon} \vec{D} d\vec{S} = Q_{ob} = \int_{\upsilon_S} \rho d\upsilon \tag{16}$$

(Iz gornjih relacija je očigledno da su nad diferencijalnim formama sprovedeni sledeći postupci: posle množenja sa diferencijalima $d\vec{S}$ i $d\upsilon$ i integracija po domenima S_L i υ primijenjene su osnovne teoreme vektorske analize Stoksa i Gaus-Ostrogradskoga.)
Značenje relacije (15) je, kao što je poznato, takvo da nam pokazuje bezvrtložni karakter elektrostatičkog polja, što će reći da linije ovog polja nijesu zatvorene linije! To je lako i dokazati. Pretpostavimo da neko električno polje ima bar jednu liniju polja koja je zatvorena. To bi značilo da i za nju važi jednačina (15), tj da je cirkulacija polja $\vec{E}$ po toj zatvorenoj liniji jednaka nuli, odnosno

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \tag{17}$$

Duž čitave konture vektori $\vec{E}$ i $d\vec{l}$ su kolinearni te se relacija (15) može napisati i ovako:

$$\oint_L E dl = 0 \tag{18}$$



Kako je dl uvijek veće od nule (iako je fizički gledano beskonačno mala veličina!) to slijedi da bi gornja jednačina bila zadovoljena <u>mora</u> biti $\vec{E} = 0$! A to opet znači: ne postoji polje $\vec{E}$ kod koga bi makar i jedna linija bila zatvorena linija!

U Elektrostatici <u>veoma važnu ulogu</u> igra cirkulacija vektora $\vec{E}$ između dvije proizvoljne tačke u polju, tj integral

$$\oint_{AaBbA} \vec{E} d\vec{l} = 0 \text{ , ili} \tag{19}$$

$$\int_{AaB} \vec{E}d\vec{l} + \int_{BbA} \vec{E}d\vec{l} = 0 \text{ , ili} \quad (20)$$

$$\int_{AaB} \vec{E}d\vec{l} = -\int_{BbA} \vec{E}d\vec{l} = \int_{AbB} \vec{E}d\vec{l} \quad (21)$$

Dakle, cirkulacija vektora polja $\vec{E}$ između dvije proizvoljne tačke polja je nezavisna od izbora puta! Ovo je osobina takozvanih <u>konzervativnih</u> polja. Ova osobina omogućava da se elektrostatičko polje opiše preko jedne (nove) veličine – <u>napona</u>. Ova veličina se definiše

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}d\vec{l} = \int_A^B Edl\cos\alpha = \int_A^B E_l dl \text{ , kako je} \quad (22)$$

$$\vec{E}_l = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial l} \quad (23)$$

to je:

$$U_{AB} = -\int_A^B \frac{\partial V}{\cancel{\partial l}} \cancel{\partial l} = V_A - V_B \quad (24)$$

Znači, cirkulacija vektora $\vec{E}$ između dvije tačke A i B polja jednaka je razlici potencijala (napon) između te dvije tačke.
Iz relacije

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V \quad (25)$$

Uočimo vrlo prost zaključak. Neka V teži nekom $V + V_0$, gdje je $V_0 = const$, pa je

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}(V + V_0) = -\operatorname{grad} V - \operatorname{grad} V_0 = -\operatorname{grad} V \quad (26)$$

Ovo znači da će E biti isto i za ovu vrijednost potencijala. Zaključak: elektrostatički potencijal nije jednoznačno određena funkcija! Ova funkcija je određena sa tačnošću od jedne konstante. Ova proizvoljnost kod potencijala nije pogodna. S toga je neophodno uzeti neku vrijednost potencijala kao referentnu, u odnosu na koju ćemo vršiti mjerenja potencijala u drugim tačkama polja. To se radi tako što se odabere jedna tačka u polju i prema njoj se vrši izračunavanje potencijala. To je referentna tačka a njen potencijal – referentni potencijal. Sada će potencijal proizvoljne tačke A polja biti u odnosu na referentnu tačku dat sa

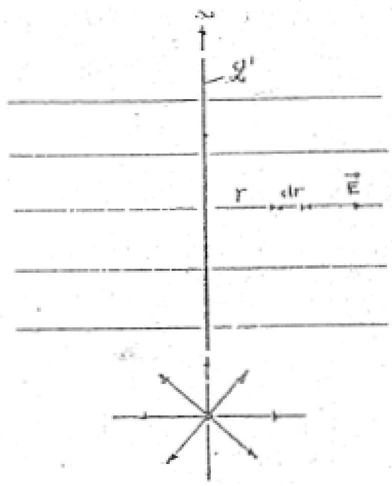
$$V_A = \int_A^R \vec{E}d\vec{l} \quad (27)$$

Očigledno je da je potencijal same referentne tačke jednak nuli. Razumije se da izborom druge referentne tačke potencijal prve referentne tačke nije jednak nuli. Zato je <u>uobičajeno</u> da je potencijal zemlje uzima za referentni potencijal.
U nekim slučajevima referentni potencijal je zgodno uzeti da se nalazi u beskonačnosti, kao što je slučaj kod potencijala tačkastog naelektrisanja:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \quad (28)$$

Očigledno je da kada $r \to \infty$ onda $V \to 0$.

U nekim drugim slučajevima određivanje distribucije potencijala ne bi bilo moguće uzimanjem referentne tačke u beskonačnosti, naročito u onim slučajevima kada se izvori polja (naelektrisanje) prostiru do u beskonačnost. Takav primjer je slučaj beskonačno dugog naelektrisanog provodnika.



$$E = \frac{q'}{2\pi\varepsilon r} \tag{29}$$

$$V = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q'}{2\pi\varepsilon r}dr = \frac{q'}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\infty}{r} \tag{30}$$

Očigledno je da u ovom slučaju moramo uzeti referentnu tačku u konačnosti, tj na nekom konačnom odstojanju r_p od niti, te je

$$V = \frac{q'}{2\pi l}\int_r^{r_p}\frac{dr}{r} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_p}{r} \tag{31}$$

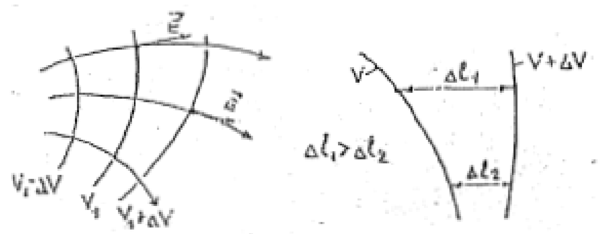
Potencijal bi mogli interpretirati i ovako:

$$V_A = \int_A^R \vec{E}d\vec{l}\,/\,q \tag{32}$$

$$V_A q = q\int_A^R \vec{E}d\vec{l} = \int_A^R q\vec{E}d\vec{l} = \int_A^R \vec{F}d\vec{l} \text{ , za } q = 1C \tag{33}$$

$$V_A = \int_A^R \vec{F}d\vec{l} = A \tag{34}$$

Dakle, potencijal u nekoj tački polja je brojno jednak onom radu kojeg izvrši elektrostatička sila polja pomjerajući jedinično pozitivno tačkasto naelektrisanje iz posmatrane tačke u referentnu tačku, tj tačku nultog potencijala. Ili, potencijal je brojno jednak „negativnom radu“ odnosno radu koji treba uložiti da se tačkasto (jedinično) naelektrisanje prenese iz referentne u zadatu tačku polja nasuprot djelovanju sile polja.



Uvođenjem potencijala stvorili smo mogućnost da dopunimo sliku polja! U tom cilju uvedena su i dva pojma: ekvipotencijalna linija i ekvipotencijalna površina. To su skupovi tačaka sa istim vrijednostima potencijala, bilo da tačke leže u ravni ili pak u prostoru, u slikovitom predstavljanju polja one su potpuno ravnopravne sa linijama polja! U to se lako uvjeriti ovakvim rezonom: najprije istaknimo da je uobičajeno da se uzastopne ekvipotencijalne linije (odnosno površine) razlikuju za isti priraštaj potencijala. Drugim riječima, uzima se da je između svih ekvipotencijalnih linija polja $\Delta V = const$.

Znači, neka je na nekom mjestu i u nekom pravcu intenzitet vektora $\vec{E}$ dat sa $E = \frac{\Delta V}{\Delta l}$.

Pošto je $\Delta V = const$, očigledno je da ako je taj priraštaj ΔV ostvaren na kraćem rastojanju, polje je u tom pravcu jače i obrnuto. To prosto znači ovo: uočimo na slici dvije ekvipotencijalne linije. Tada je

$$\left.\begin{aligned} \left|\vec{E}_1\right| &= \frac{\Delta V}{\Delta l_1} \\ \left|\vec{E}_2\right| &= \frac{\Delta V}{\Delta l_2} \end{aligned}\right\} \quad \left|\vec{E}_2\right| > \left|\vec{E}_1\right| \quad (\text{jer je } \Delta l_2 < \Delta l_1) \tag{35}$$

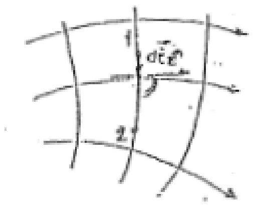
Možemo zaključiti: tamo gdje su ekvipotencijalne linije gušće polje je jače, i obrnuto! Na ovom mjestu lako se objašnjava i predznak minus u relaciji

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V \tag{36}$$

Naime, u ma kom pravcu ova relacija se može i ovako pisati:

$$E_l = -\frac{\partial V}{\partial l} \tag{37}$$

Znači, ako je $\partial V < 0$, tj ako je priraštaj potencijala opadajući u nekom pravcu l tada je $E_l > 0$, i obrnuto. To opet znači: polje je usmjereno od tačke sa većim ka tački sa manjim potencijalom. Odnosno, u smjeru <u>suprotnom</u> od smjera vektora $\vec{E}$ potencijal raste! Ili, u <u>smjeru</u> dejstva vektora $\vec{E}$ potencijal <u>opada</u>! (I obrnuto: u smjeru <u>suprotnom</u> od $\vec{E}$ potencijal <u>raste</u>)



Na kraju, istaknimo jedan važan odnos između linija polja (tj vektora $\vec{E}$) i ekvipotencijalnih linija. U tom smislu posmatrajmo (vidi sliku) $\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$ između tačaka „1“ i „2“. kao što se sa slike vidi, ove se tačke nalaze na istom potencijalu! Otuda je

$$\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = V_1 - V_2 = 0$$

S druge strane, možemo pisati

$$\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 Edl\cos\measuredangle(\vec{E},d\vec{l}) = 0, \quad \Rightarrow \tag{39}$$

$$\cos\measuredangle(\vec{E},d\vec{l}) = 0 \tag{40}$$

$$\vec{E} \perp d\vec{l} \tag{41}$$

Zaključak je očigledan: linije polja i ekvipotencijalne linije sijeku se pod pravim uglom u svakoj tački polja! Važi i obrnuto! Ako u elektrostatičkom polju uočimo liniju koja je normalna na liniju polja onda je ta linija ekvipotencijalna.

2.2 Provodnici u elektrostatičkom polju

A. Najvažniji elementi svakog elektrostatičkog sistema su provodni djelovi. Oni se najčešće pojavljuju u vidu takozvanih metalnih elektroda, koje su povezane za polove izvora, tj oni se pojavljuju kao oni djelovi na kojima se izdvajaju slobodna naelektrisanja. Ti metalni djelovi odnosno tijela postaju tada izvori tj. nosioci polja (elektrostatičkog). Tipičan primjer ovakvih provodnih metalnih djelova jesu obloge kondenzatora.
Kako se ponaša provodnik u elektrostatičkom polju?
Možemo slobodno reći da već sada imamo praktično sve elemente na osnovu kojih možemo zaključiti o njegovom ponašanju. Naime, kako u Elektrostatici nema kretanja naelektrisanja, tj kako je

$$\vec{J} = 0 \tag{42}$$

To je

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \tag{43}$$

$$\rho = 0 \tag{44}$$

Zaključak: elektrostatičko polje u provodniku mora biti jednako nuli! Odavde slijedi još je dna činjenica:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{45}$$

Većina realnih sredina je linearna te otuda imamo da važi: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, pa je

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \tag{46}$$

$$\rho = 0 \tag{47}$$

Dakle, kada unutar nekog provodnika (metala) unesemo naelektrisanje onda će se ono za vrlo kratko vrijeme raspršiti.
Pogledajmo još i granične uslove. Oni su

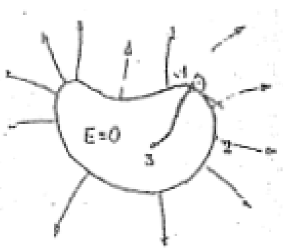
$$E_t = 0 \tag{48}$$

$$D_n = \eta \tag{49}$$

Odavde imamo još i

$$E = E_n = \frac{\eta}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \tag{50}$$

$$\eta = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} \tag{51}$$



Nije teško pokazati da je površina metalnog tijela ekvipotencijalna u svakoj svojoj tački. Naime, neka je dato neko metalno tijelo kao na slici.
Znamo da će svako naelektrisanje, doneseno ovom tijelu, rasporediti se po njegovoj površini. Nastalo polje imaće takvu raspodjelu da će njegove linije biti normalne na površinu tijela.
Za uočene tačke 1, 2 i 3 možemo pisati:

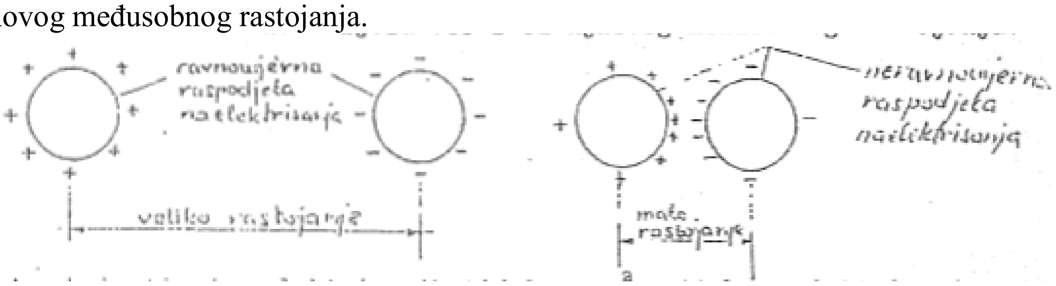
$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = E_n dl \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$V_1 = V_2 \tag{53}$$

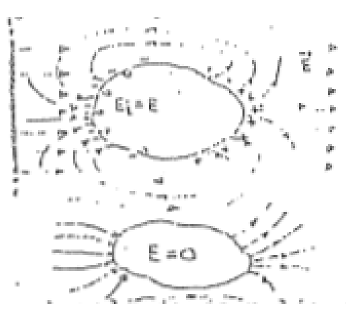
Dakle, za sve tačke na površini potencijal je isti. Površina je, znači, ekvipotencijalna. Na usput izračunajmo još i

$$V_1 - V_2 = \int_1^3 \vec{E}d\vec{l} = 0 \qquad V_1 = V_3 \tag{54}$$

Znači, i sve tačke u unutrašnjosti metalnog tijela su na istom potencijalu koji je isti kao na površini tijela!
Naglasimo još jedan put: ekvipotencijalnost površina provodnog tijela karakteristika je samo elektrostatičkih sistema!
Kako je raspoređeno naelektrisanje na površini provodnog tijela zavisi od oblika površine toga tijela. Na onim mjestima tijela koja su šiljata, oštrija (poluprečnik zakrivljenosti manji!) gustina naelektrisanja je veća i obrnuto.
Ako imamo više provodnih tijela na relativno bliskom rastojanju tada će distribucija naelektrisanja po površinama ovih tijela zavisiti ne samo od oblika tijela već i od njihovog međusobnog rastojanja.

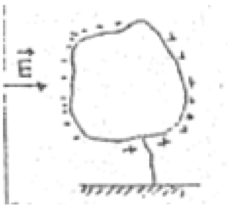


Međusobni uticaj naelektrisanih tijela na raspodjelu naelektrisanja na njima naziva se <u>elektrostatički uticaj</u> ili <u>indukcija</u> (influencija).
B. Posmatrajmo sada proizvoljno <u>nenaelektrisano</u> metalno tijelo u homogenom polju. Kao što znamo, metalno tijelo se odlikuje mnoštvom slobodnih elektrona na koje djeluje sila $\vec{F} = -e\vec{E}$. (Homogeno polje možemo ostvariti pomoću naelektrisane metalne ploče.) Na „ulaznom“ kraju imamo priliv elektrona, dok na „izlaznom“ imamo višak (+) naelektrisanja. Razdvojena odnosno indukovana naelektrisanja takođe stvaraju svije polje! (vidi sliku). Ovo indukovano polje se sastoji iz dijela polja unutar provodnika i dijela polja izvan provodnika. Onaj dio indukovanog homogenog polja unutar provodnika mora biti po pravcu i intenzitetu isto



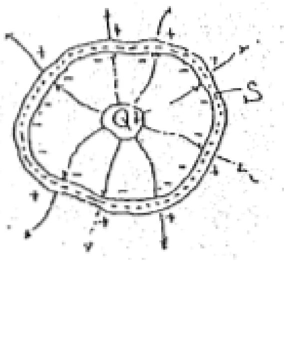
kao i spoljašnje polje $\vec{E}$ ali suprotnog smjera, jer smo ranije pokazali da je polju unutar metalnog provodnika jednako nuli. Što se tiče dijela indukovanog polja izvan provodnog tijela možemo reći da je ono, na „ulaznom“ kraju usaglašenog smjera sa spoljnim poljem $\vec{E}$, kao i na „izlaznom“, dok je suprotnog smjera u dijelu prostora „iznad“ i „ispod“ provodnog tijela. Logično je zaključiti: kada se provodno nenaelektrisano tijelo nađe u elektrostatičkom polju (recimo homogenom) linije spoljašnjeg polja se zgušnjavaju na „ulaznom“ i „izlaznom“ kraju tijela dok se razređuju (polje je oslabljeno!) u pravcima normalnim na pravac „ulaz“ –„izlaz“!

Očigledno, tijelo je dobilo neki potencijal! Kažemo očigledno iz razloga što elektrostatičko polje (kao i svako drugo polje) karakteriše potencijal u svakoj njegovoj tački. Pa ako u nekom dijelu toga polja unesemo nenaelektrisano provodno tijelo logično je da će njegovim unošenjem ovo tijelo dobiti i neki potencijal (što je opet u skladu i sa definicijom potencijala). Interesantno bi bilo postaviti pitanje: Koliki je taj potencijal? U tom cilju rezonujemo ovako: zamislimo u prvi mah da je to tijelo „tačkastih“ dimenzija. Tada bi njegov potencijal bio jednak potencijalu tačke polja u kojoj se nalazi. No, kako se radi o realnom tijelu (konačnih dimenzija) izdijelili bismo tijelo na konačan broj „tačkastih“ djelova, pa bi potencijal tijela bio jednak <u>srednjoj</u> vrijednosti potencijala svih „tačaka“!



Slučaj provodnog naelektrisanog tijela u elektrostatičkom polju daje nam ideju kako da naelektrišemo to provodno tijelo. Naime, još dok se tijelo nalazi u polju spojimo ga provodnom (metalnom) žicom sa zemljom, (vidi sliku). Slobodni elektroni iz zemlje pohrliće na provodno tijelo (jer je na višem potencijalu) i tako će neutralisati pozitivno naelektrisanje na „izlaznoj“ strani tijela. Metalna žica se sada prekine (dok se tijelo nalazilo u polju!). tijelo uklonimo iz polja i dobijamo ga kao (negativno) naelektrisano.

Činjenica da je unutar provodnika polje $E = 0$ ima veliki praktični značaj! Naime, ako bi odstranili unutrašnjost provodnog tijela, tj ako od čitavog provodnog tijela „zadržimo“ samo tanak spoljašnji sloj odnosno zid, opet će unutar takvog provodnika važiti gornja relacija! A to opet znači, ako u takav šupalj provodnik unesemo neki osjetljivi instrument (na primjer galvanometar) nikakvo spoljašnje polje neće imati uticaja na njega! Kažemo da smo izvršili elektrostatičku zaštitu tog instrumenta. Međutim, ovakav kompaktan oklop često nije pogodan (jer potpuno izoluje instrument – i vizuelno), pa se umjesto



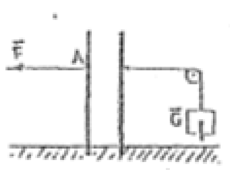
masivnog oklopa koristi <u>žičana mreža</u>, koja takođe neutrališe spoljašnje polje u najvećem dijelu prostora koji ograničava mreža. Ovakav žičani oklop je poznat kao „Faradejev kavez“. Postavimo sada i obrnuto pitanje: da li izgradnjom metalnog plašta, odnosno oklopa, oko nekog naelektrisanja štitimo okolnu sredinu od električnog polja tog naelektrisanja? Pogledajmo slučaj na slici i primijenimo Gausovu teoremu (Q je u vakuumu):

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q+Q_i}{\varepsilon} \tag{55}$$

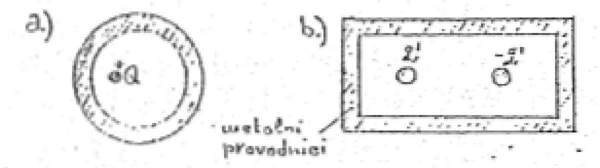
U svakoj tački površine S važi da je $E = 0$, te je

$$\frac{Q+Q_i}{\varepsilon}=0 \quad \Rightarrow \quad Q_i=-Q \tag{56}$$

Dakle, indukovano naelektrisanje (po unutrašnjem zidu) biće jednako po intenzitetu naelektrisanju Q (izvora polja) ali suprotnog znaka. U samom zidu šupljeg metalnog tijela polje će biti, kao što znamo, $E=0$. Kako je ovo tijelo, prije unošenja naelektrisanja Q, bilo nenaelektrisano, dakle neutralno u električnom pogledu, to je na njegovoj površini ostao višak pozitivnog slobodnog naelektrisanja u istom iznosu Q. Od ovog naelektrisanja, logično, u spoljašnjem dijelu prostora oko metalnog tijela postoji elektrostatičko polje. Znači, oklapanjem slobodnog naelektrisanja Q nijesmo zaštitili okolni prostor od dejstva njegovog elektrostatičkog polja!
Interesantno bi bilo pitanje: kakva je distribucija naelektrisanja na unutrašnjem, a kakva na spoljašnjem zidu šupljeg metalnog tijela?
Distribucija naelektrisanja po unutrašnjem zidu zavisi od položaja izvora Q! U onom dijelu unutrašnjeg prostora gdje je izvor Q bliži unutrašnjem zidu u tim tačkama indukovano naelektrisanje biće gušće i obrnuto! Međutim, pošto je polje u zidu jednako nuli distribucija spoljašnjeg naelektrisanja zavisiće samo od <u>oblika</u> spoljnje površine! Da bi se ta činjenica lakše prihvatila poslužićemo se analogijom iz Mehanike: ma kako velikom silom djelovati u tačku A (vidi sliku) ova sila neće imati nikakvog dejstva (uticaja) na opterećenje pričvršćeno o drugi kruti zid.



<u>Primjeri</u>: Kakva će biti distribucija spoljašnjeg i unutrašnjeg naelektrisanja u sledeća dva slučaja:



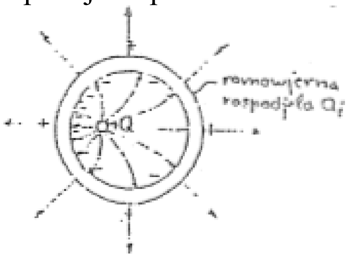
Odgovor: vidi sledeću stranu.
Na kraju, razmotrimo još i ovakav primjer: u polju tačkastog naelektrisanja q, na odstojanju R od njega, unesimo tačkasto tijelo ($R \gg a$), koje je prvobitno bilo nenaelektrisano. Usled indukcije na tačkastom tijelu izdvojiće se jednake količine pozitivnog i negativnog naelektrisanja. Iako je ukupno naelektrisanje na njemu jednako nuli, potencijal je različit od nule! Njegova vrijednost je, kao što znamo, $V=q/4\pi\varepsilon_0 R$ (Referentna tačka uzeta u beskonačnost.) Da bismo ustanovili predznak indukovanog naelektrisanja kao i njegovu brojnu vrijednost, vežimo tačkasto tijelo sa zemljom. Time smo njegov potencijal izjednačili sa potencijalom zemlje. (Tom prilikom elektroni iz zemlje neutralisaće pozitivni dio indukovanog naelektrisanja.) Sada možemo pisati:

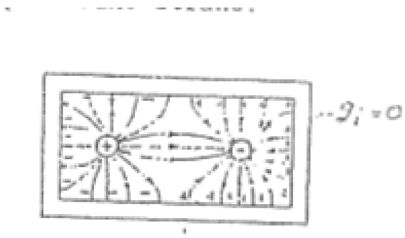
$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 a}=0 \tag{57}$$

$$q_i=-q\frac{a}{R} \tag{58}$$

Kako je a/R uvijek veće od nule slijedi: indukovano naelektrisanje je uvijek suprotno po znaku od onog koje ga je izazvalo. Možemo reći i ovako: Indukovano naelektrisanje je suprotno po znaku od potencijala drugog tijela u njegovoj okolini.

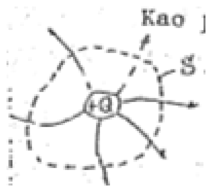
Odgovor na pitanja sa prethodne strane;





2.3 Dielektrici u elektrostatičkom polju

Pod dejstvom električnog polja atomi dielektrične supstance se polarizuju. To će reći da svaki atom supstance postaje električni dipol, pa je razumljivo da kada posmatramo ukupno električno polje u dielektriku mi moramo voditi računa kako o spoljašnjem polju tako i o polju svih polarizovanih atoma.
Postavimo sad ovakvo pitanje: kako ćemo uzeti u račun to mnoštvo vezanih naelektrisanja u polarizovanom dielektriku, odnosno kako uzeti to mnoštvo polarizovanih atoma dielektrika (elementarnih dipola)? A zatim odmah dodajmo: pokazaćemo da se to mnoštvo polarizovanih atoma supstance može zamijeniti 1. ekvivalentnom zapreminskom gustinom ρ_υ i 2. ekvivalentnom površinskom gustinom η_υ. Potražimo njihove izraze.



Kao prvi vid nehomogenosti posmatrajmo ovakav slučaj: neka je neko proizvoljno vremenski nepromjenljivo naelektrisanje ($+Q$) uneseno u neki dielektrik. Ograničimo posmatranje na domen obuhvaćen nekom proizvoljnom zatvorenom površinom S. Od ranije nam je poznato da će kroz ovu površ, od trenutka uspostavljanja procesa polarizacije pa do njegovog završetka, proteći (pozitivno) naelektrisanje dato relacijom

$$Q_V = \oint_S \vec{P} d\vec{S} \tag{59}$$

Isto ovolika količina negativnog naelektrisanja ostala je u „višku“ unutar posmatranog domena, dakle

$$Q_V = -\oint_S \vec{P} d\vec{S} \tag{60}$$

No, s druge strane, ovaj „višak“ negativnog naelektrisanja možemo izraziti i preko zapreminske gustine vezanog naelektrisanja ρ_υ unutar domena i to kao

$$\int_{\upsilon_S} \rho_\upsilon d\upsilon \tag{61}$$

Ovim izrazom zamijeniti ćemo lijevu stranu poslednje jednačine, dok ćemo desnu, shodno teoremi Gaus-Ostrogradskog, zamijeniti sa

$$\int_{\upsilon_S} \operatorname{div} \vec{P} d\upsilon \tag{62}$$

Tako dolazimo do ovakve jednačine

$$\int_{\upsilon_S} \vec{P} d\upsilon = -\int_{\upsilon} \operatorname{div} \vec{P} d\upsilon \text{ , odakle konačno slijedi} \tag{63}$$

$$\rho_v = -\operatorname{div}\vec{P} \tag{64}$$

Znajući, od ranije, da je (za linearne sredine)

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \text{ , a odavde} \tag{65}$$

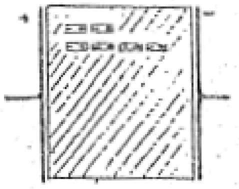
$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \tag{66}$$

Te se izraz za ρ_v može napisati i u ovom obliku

$$\rho_v = -\operatorname{div}\left[(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}\right] \tag{67}$$

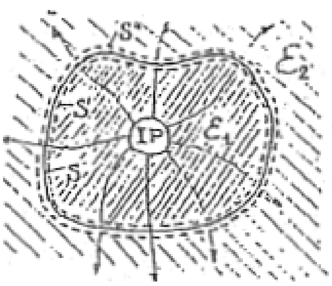
Prodiskutujmo sada gornju relaciju (imajući na umu da je poznata iz matematike činjenica: $\operatorname{div} const = 0$)

1. Ako je $\varepsilon = const$, što će reći da se radi o homogenom dielektriku, tada je $\varepsilon - \varepsilon_0 = const$, pa je $\rho_v \neq 0$ samo tamo gdje je polje $\vec{E}$ nehomogeno! ($\rho_v = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\operatorname{div}\vec{E}$)
2. Ako je $\vec{E}$ homogeno biće $\rho_v = -\left|\vec{E}\right|\operatorname{div}(\varepsilon - \varepsilon_0)$, a ovo će biti $\neq 0$ samo onamo gdje je $\varepsilon \neq const$! Dakle, na mjestima nehomogenosti dielektrika.
3. Ako je i polje homogeno ($\vec{E} = const$) i dielektrik homogen ($\varepsilon = const$) tada je $\rho_v = 0$, što na prvi pogled može da navede na pogrešan zaključak da nema vezanog naelektrisanja unutar homogenog polarizovanog dielektrika. Smisao ove relacije, međutim, jeste ovaj: u homogenom dielektriku polarizovanom homogenim poljem u svakoj tački polja, unutar posmatranog domena ograničenog površinom S, došlo je do kompenzacije pozitivnih i negativnih vezanih naelektrisanja te nema nekompenzovanog vezanog naelektrisanja unutar posmatranog domena! Tipičan ovakav slučaj jeste primjer pločastog kondenzatora u Elektrostatici.



Naime, kada je dielektrik homogen, a pošto je polje već homogeno, svaki atom je jednako polarizovan, tj u svakoj tački imamo sučeljavanje dva jednaka dipola te kompenzaciju električnih dejstava unutar dielektrika, odnosno kompenzaciju električnih polja. Dakle, ni u jednoj tački unutar dielektrika nema nekompenzovanog vezanog naelektrisanja, što se piše u obliku $\rho_v = 0$.

Posmatrajmo sada jedan drugi primjer. Neka se oko izvora polja IP nalazi dielektrik ε_1 a oko ovog drugi dielektrik ε_2, kao na slici.



U tačkama razdvoje površine S imamo skokovitu promjenu električnih svojstava obje sredine. Osim razdvojne površine S uočimo (vidi sliku) i površine S' i S''. Površina S' je sva u prvoj sredini (ε_1) i pri tome još teži površini S, tj $S' \to S$. Površina S'' leži sva u drugoj sredini (ε_2) i pri tome još teži površini S, tj $S'' \to S$. Ili, kratko rečeno, površine S' i S'' su beskonačno bliske površini S.

Nakon završetka procesa polarizacije (pretpostavljen pozitivan izvor polja IP) kroz površine S' i S'' proteći će sledeće količine pozitivnog naelektrisanja

$$Q_{V1} = \oint_{S'} \vec{P}_1 d\vec{S} \tag{68}$$

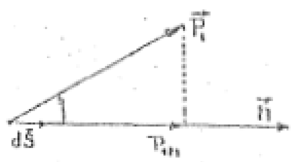
$$Q_{V2} = \oint_{S''} \vec{P}_2 d\vec{S} \qquad (69)$$

Ove količine vezanog naelektrisanja, pomjerenog u procesu polarizacije dielektrika, locirane su negdje između površina S' i S''. Naime, kako su ove površine vrlo bliske površini S možemo s pravom tvrditi da su naelektrisanja Q_{V1} i Q_{V2} smještena na površini S (naelektrisanje Q_{V2} je <u>negativno</u>). Kako je $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ to je i $P_1 \neq P_2$, a odavde i $Q_{V1} \neq Q_{V2}$, te je ukupno vezano naelektrisanje na površini S:

$$Q_V = Q_{V1} - Q_{V2} = \oint_S (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) d\vec{S} \text{ , pošto je } S' \approx S \approx S'' \qquad (70)$$

Budući da je naelektrisanje Q_V raspoređeno po površini S možemo ga izraziti preko površinskog (vezanog) naelektrisanja kao

$$Q_V = \oint_S \eta_v dS \qquad (71)$$



Dok je $(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) d\vec{S} = (P_{1n} - P_{2n}) dS$, pa izraz (70) postaje

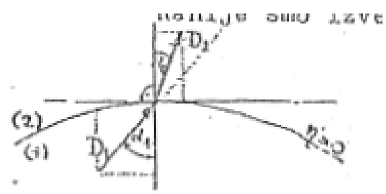
$$\oint_S \eta_v dS = \oint_S (P_{1n} - P_{2n}) dS \qquad (72)$$

Te je konačno

$$\eta_v = P_{1n} - P_{2n} \qquad (73)$$

Dakle, na granici između dvije površine izdvaja se vezano naelektrisanje čija je površinska gustina data gornjim izrazom. Ovo smo izveli pod pretpostavkom da je izvor polja u prvoj sredini, tj da su linije polja usmjerene <u>iz prve u drugu</u> sredinu. Obrnuto bi bilo

$$\eta_v = -P_{1n} + P_{2n} \qquad (74)$$



Ranije smo izveli granične uslove u obliku

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad (75)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad (76)$$

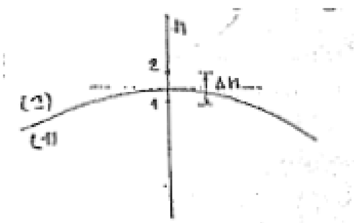
Pri čemu smo pretpostavili da na graničnoj površini nema naelektrisanja, tj $\eta = 0$. Zakon prelamanja je dat u obliku

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\dfrac{D_{1t}}{D_{1n}}}{\dfrac{D_{2t}}{D_{2n}}}=\frac{D_{1t}}{D_{2t}}=\frac{\varepsilon_1 E_{1t}}{\varepsilon_2 E_{2t}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \qquad (77)$$

Zatim smo kazali: ako je $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ da je $\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2$ a odavde $\alpha_1 > \alpha_2$. Prelomni ugao je veći u onoj sredini sa većom dielektričnom konstantom! (ili: u sredini sa većom dielektričnom konstantom prelamanje se odvija od normale, i obrnuto.)
A sada pogledajmo kako se ponaša potencijal V na graničnoj površini. Neka je na graničnoj površini $\eta \neq 0$. Na graničnu površinu povučemo proizvoljnu normalu i na njoj uočimo tačke 1 i 2 na odstajanju Δn po normali od granične površine. Duž normale, s obzirom na granične uslove djeluju samo normalne komponente polja, te je

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E_n dn = (E_{1n} + E_{2n})\frac{\Delta n}{2} \qquad (78)$$

Kada $\Delta n \to 0$ čitava desna strana teži nuli, pa je $V_1 = V_2$! Dakle, potencijal ostaje isti s obje strane granične površine. Ili, na graničnoj površini nema skokovitih promjena potencijala (kontinualan je).



Veoma važan podatak o dielektriku i njegovom ponašanju u spoljašnjem polju, naročito kada su u pitanju jaka polja, jeste dielektrična čvrstoća ili probojno polje dielektrika. Dielektrička čvrstoća je ona vrijednost električnog polja pri kojoj je proces polarizacije dielektrika još uvijek elastičan proces, tj to je ona vrijednost polja čijim prekoračenjem dolazi do čupanja elektrona iz atoma supstance (jonizacija dielektrika).
Objasnimo ovaj proces pobliže. Naime, poznato je da pod dejstvom električnog polja dolazi do polarizacije dielektrika, tj do pomjeranja jezgara atoma u smjeru polja a elektrona (u ljuskama) u smjeru suprotnom od smjera polja. Kažemo tada da su se atomi supstance polarizovali, pa se svaki atom može shvatiti kao elementarni električni dipol. Znači, polje dejstvuje tako kao da hoće da razdvoji jezgra atoma od njihovih elektrona. Ovom odvajanju suprotstavljaju se privlačne (restitucione sile) ili Kulonove sile. Znači, između privlačnih i odbojnih sila unutar atoma vlada ravnoteža! Ova ravnoteža vlada sve dotle dok su privlačne sile jače od odbojnih (koje izaziva polje). Uklanjanjem polja $\vec{E}$ nastaje elastičan proces vraćanja atoma u prvobitno stanje. Međutim, kada spoljašnje sile polja $\vec{E}$ postane toliko jako da odbojne sile unutar atoma nadjačaju njihove privlačne sile, dolazi do čupanja jednog ili više elektrona iz atoma. Ako bi sada spoljašnje polje prestalo da djeluje ne bi došlo do vračanja elektrona na njihova prvobitna mjesta. Ovakav proces je neelastičan. Pojavom slobodnih elektrona unutar dielektrika ovaj postaje provodan. Kažemo da se dielektrik jonizovao. Zato pod dejstvom jakog spoljašnjeg polja dolazi do intenzivnog strujnog toka. Ovaj proces jonizacije ima vrlo buran karakter jer se broj slobodnih naelektrisanja jako brzo umnožava! Tako dolazi do proboja dielektrika. Probojna jačina polja je ona kritična vrijednost polja $\vec{E}$ pri kojoj je proces polarizacije još uvijek elastičan! Dakle, prekoračenje ove vrijednosti dolazi do jonizacije ili proboja dielektrika. Dielektrična čvrstoća vazduha je $E_{kv} = 30 kV/cm$. Za

druge dielektrike ovo kritično polje ima znatno veću vrijednost i kreće se na $100kV / cm$ i više.
Na kraju, pomenimo još jedan važan parametar dielektrika. To je takozvani tangens dielektričnih gubitaka. Definiše se relacijom

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{79}$$

Kao što se iz izraza vidi, dielektrični gubici zavise direktno proporcionalno od provodnosti (što je i logično) a obrnuto proporcionalno od učestanosti i dielektrične konstante.